ELEMENTALE GEOMETRICUM, ex Euclidis Geometria, à Ioãne Vægelin Haylprõnenſi, ad omnium Mathematices ſtudioſorũ vtilitatẽ decerptũ.

PARISIIS
Apud Chriſtianum Wechelum, ſub Pegaſo, in vico Bellouacenſi. & è regione apud Carolũ Perier
1550.

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

12 32 E 26

GERARDVS NOVIOMA-GVS, LECTORI.

Quid punctum, quid linea, circulus, angulus, orbis,
Deſignet, paucis hæc elementa docent.
Sydereos curſus hinc diſces, ut uenerere
Patrem, qui terras cōdidit, aſtra, polos,

EMINENTISSIMO VIRO GEORGIO TANſtetter Collimitio, Artium & medicinæ Doctori peritiſſimo, & Mathematices, in inclyto Viennenſi Gymnaſio profeſſori ordinario perſpicaciſſ. Patrono ſuo obſeruātiſſ. Io. Vœgelin Haylpronē. S.

CVM prælegendorum Mathematum muneri me ſubſtituiſſes, cœpi illico cogitare, qua ratione tibi gratitudinem meam declararem: cúmque diu id me ſollicitum dediſſet, uidi tandem nulla re magis animum in te meum perſpicuum fore, quàm ſi diligentē ac ſtrenuam operam ibi locarem. Ea propter ſummum eſt mihi ſtudium, non ſolùm accuratè, quæ iubes, legere, uerumetiam in his docendis, eo uti ordine, quo Matheſeos tyrones facillimè erudiantur, & ad alios huius generis libros idonei auditores reddantur. Cùm uerò poſt numerorum ſcientiam, quam hac hyeme, tuo monitu, interpretatus ſum, neceſſariò tradenda putarim Elementa Geometrica (ſine his enim fruſtrà alias aggrediare diſciplinas.) Ideo propter omnium ſtudioſorum commoda, ex Euclidis Geometria, eas duntaxat excerpſi Propo-

BIBLIOTECA NAZ. VITTORIO EMANUELE ROMA

ſitiones, quæ in demonſtrationibus linearibus crebriùs obuerſantur, quæq; ſatis prope ſunt ad diſciplinarum culmen perducere. In *quibus ordinandis pariter ac demonſtrandis, prudens non ſemel ab* Euclide *diſſentio. ita enim rei breuitas, & quam ſemper quæſiui facilitatem, poſtulabant.* Hunc *ergo libellum, obſeruantiſſime* Patrone, *tuo ſolerti examini ſubmitto: nō ambigens quin pro tua in me beneuolentia, errata repræhēdas, et cōmodè dicta alacriter ſuſcipias, meq; ut ſoles, perpetuo proſequaris amore.* Vale, *Viennæ ex ciuium Collegio, pridie Calendas Martias.* Anno.

1528.

ELEMEN-

ELEMENTALIS GEOMETRICI CAPVT I.

DEFINITIONES.

1 *Punctus, eſt cuius pars nulla eſt.* *Punctus.*

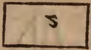
2 *Linea, eſt longitudo ſine latitudine. Cuius quidem extremitates ſunt duo puncta.* *Linea recta.*

3 *Linea recta, eſt ab uno puncto ad alium breuiſſima extenſio, in extremitates ſuas utrunque eorum recipiens.*



4 *Superficies, eſt quæ longitudinem & latitudinem tantum habet. Cuius quidem termini ſunt lineæ.*

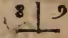
5 *Superficies plana, eſt ab una linea ad aliam breuiſſima extenſio, illas recipiens in ſuas extremitates.* *Superficies plana.*

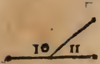


6 *Angulus planus, eſt duarum linearum alternus cõtactus, quarum expanſio eſt ſuper ſuperficiem planam, applicatióque non directa.*

7 *Angulus rectilineus, eſt quem cõtinent duæ lineæ rectæ.*

8 *Angulus rectus, eſt uterlibet eorum, qui fiunt, dum recta linea ſuper rectam ſteterit, duóſque angulos ex utraque parte fecerit æquales.* *Angulus rectus.*

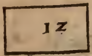




9 Linea perpendicularis, eſt recta linea, rectæ inſiſtens, duóſque circum ſe angulos rectos faciens.

10 Angulus obtuſus, eſt q̃ recto maior eſt.

11 Angulus acutus, eſt qui recto minor eſt.



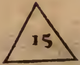
12 Terminus, eſt q̃d uniuſcuiuſq; finis eſt.

13 Figura, eſt quæ termino, uel terminis, clauditur.

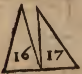
14 Rectilineæ figuræ ſunt, quæ rectis lineis continentur.

Rectilinearum figurarum, alia eſt trilatera, alia quadrilatera, alia multilatera.

Triangulorum, alius iſopleuros, id eſt, æquilaterus, alius iſoſceles, id eſt, æquicrurus, alius ſcalenus.



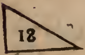
15 Aequilaterus, eſt qui tribus æquis finitur lateribus.



16 Iſoſceles, qui duo tantùm habet latera æqualia.

17 Scalenus, qui tribus inæqualibus continetur lateribus.

Amplius triangulorum, alius eſt Orthogonius, id eſt, rectangulus: alius Oxygonius, id eſt, acutiangulus: alius Amblygonius, id eſt, obtuſiangulus.



18 Orthogonius, eſt qui unum habet rectum angulum.



19 Amblygonius, qui unum habet obtu-

ſum

ſum angulum.

20 *Oxygonius, qui cunctos tres habet acutos angulos.*



21 *Quadrilaterarũ figurarũ, Quadratum eſt, quod æquilaterũ atq; rectangulum eſt.*

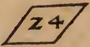
22 *Tetragonus longus, rectãgulus quidem eſt, ſed æquilaterus non eſt.*



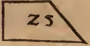
23 *Rhombus eſt, qui æquilaterus quidem, ſed rectangulus non eſt.*



24 *Rhomboides, qui neq; latera, neq; angulos æquales habet, latera tamẽ oppoſita, & angulos oppoſitos æquales habet.*

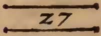


25 *Trapezia, hoc eſt, menſulæ, omnes ſunt, præter has, figuræ quadrilateræ.*



26 *Multilateræ figuræ pluribus quàm quatuor clauduntur lineis.*

27 *Aequidiſtantes lineæ ſunt, quæ in eadem ſuperficie collocatæ, atq; in alterutram partem protractæ, non concurrunt, etiam ſi in infinitum protrahantur.*



PETITIONES.

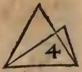
1 *Omnes rectos angulos ſibijnuicem eſſe æquales.*

2 *Si linea recta ſuper duas rectas ceciderit lineas, duóſque angulos ex una parte illius lineæ duobus rectis angulis minores fecerit, has duas lineas in eandem partem protractas, coniunctum iri. Et econtrario.*



Triangulus.

3 Duas rectas lineas ſuperficiem nullam claudere.



Oxygonius.

4 Si in aliquo triangulo, alterum duorum laterum ſuper baſim ſtantium demittatur, alterum neceſſariò uel breuius, uel longius fieri. Quam nos hic quartam ponimus petitionem, Euclides ſeptimam primi libri propoſitionem annotauit. Verùm quia demonſtratio eius difficilior uideri poſſet incipienti primùm diſcere elementa, & demõſtrationibus linearibus nõdũ aſſueto, quodq; ipſa petitioni proxima eſt, eiuſq; uſus admodùm rarus, id propterea inter poſtulata eã annumerauimus.

COMMVNES SENTENTIAE.

1 Quæcunque uni & eidem ſunt æqualia, inter ſe ſunt æqualia.

2 Si æqualibus æqualia addantur, aggregata fient æqualia.

3 Si ab æqualibus æqualia auferantur, reſidua erunt æqualia.

4 Si ab inæqualibus æqualia auferantur, reſidua erunt inæqualia.

5 Si inæqualibus æqualia addãtur, aggregata erunt inæqualia.

6 Si duæ res fuerint uni duplices, ipſæ ſibi inuicem erunt æquales.

7 Si fue-

7 *Si fuerint duæ res, quarum utraq; unius & eiuſdem eſt dimidium, erunt ſibijnuicem æquales.*

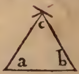
8 *Si qua res alteri ſuperponatur applicetúrq; ei, nec excedat altera alteram, hæ erunt ſibijnuicem æquales.* Et econtrariò.

9 *Omne totum maius eſt ſua parte.*

10 *Totum æquale eſt ſuis omnibus partibus ſimul ſumptis.*

PROPOSITIO PRIMA.

Suprà datam rectam lineam triangulum æquilaterum collocare.

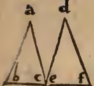


Sit data linea a b, ſic ſuper eam conſtituemus triangulum æquilaterum. Poſito pede circini immobili in a, alter extẽdatur ſecundum ſpacium lineæ a b, & circunductus ſcribat arcum occultum. Deinde circino non uariato, pedem eius immobilem ponamus in b, & alter circunductus priorem arcum ſecet in puncto c. Punctus ille ſectionis c iungatur lineis rectis cum a & b pũctis, & factus erit triangulus æquilaterus. Nam omnes hæ lineæ ſunt uni æquales, ei ſcilicet, quæ eſt inter extremitates pedum circini. quare per primam communem ſententiam,

tentiam, inter ſe ſunt æquales. Aequicrurum haud aliter datæ lineæ ſuperpones, niſi quod circinus amplius, quàm eſt datæ lineæ ſpaciũ, uel minus extendendus eſt. Scalenus tũc fiet, ſi circinus primò amplius, deinde minus extendetur, quàm eſt data linea.

SECVNDA PROPOSITIO.

Quoruncunque duorum triangulorum duo latera unius, duobus lateribus alterius fuerint æqualia, & anguli his æquis lateribus contenti æquales, erit baſis baſi, & reliqui anguli æquis lateribus cõtenti, alter alteri, & totus triangulus toti triangulo æqualis.

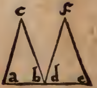


Sint duo trianguli a b c, d e f, ſitq́; latus a b æquale lateri d e. Et latus a c, æquale lateri d f, & angulus a æqualis angulo d. Dico baſim b c æqualem eſſe baſi e f, & angulũ b, angulo e, & angulũ c, angulo f, & totam trianguli a b c ſuperficiem, ſuperficiei trianguli d e f æqualem. Nã finge lineam d e ſuperponi & accommodari a b lineæ, neutra igitur alteram excedet per conuerſionem octauæ conceptionis: poſitæ enim ſunt æquales, & punctus d, cadet ſuper a punctũ, & ſimiliter e punctus ſuper b. Quia uerò angulus a poſitus eſt æqualis angulo d, neceſſariò cadet linea d f, ſuper lineam a c, & propter præſtructam

æqualita-

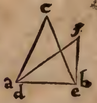
æqualitatem earum, inádet f punctus, puncto c, & erit cum eo unus pũctus: quapropter baſis e f, cadet ſuper baſim b c, ita ut fiat cum ea, linea una, alioqui duæ rectæ lineæ clauderent ſuperficiem, quod eſt cõtra petitionem tertiam: & quia neutra alteram excedit, (terminãtur enim iiſdem punctis) ſunt igitur æquales. Rurſus angulus e ſuperpoſitus eſt angulo b, & eum non excedit, neq; ab eo exceditur, eſt ergo ei æqualis. Haud *aliter angulus f, æqualis probatur angulo c.* Præterea *totus triangulus d e f, toti triangulo a b c, ſuperpoſitus eſt, ipſum neque excedens, neq; ab eo ſuperatus, quapropter cõcluditur ei æqualis, propter octauam communem ſententiam.*

TERTIA PROPOSITIO.



Si tria latera unius trianguli fuerint æqualia, tribus lateribus alterius trianguli, qui continentur æquis lateribus, anguli æquales erunt.

Sint duo trianguli a b c, d e f, ſitq; latus a c æquale lateri d f, & b c, æquale e f, & a b æquale d e. Dico *angulũ c eſſe æqualẽ angulo f, & angulũ a, angulo d, & angulũ b, angulo e, hi enim laterib⁹ relatiuis, et æqualibus cõtinẽtur.* N*ã ſuperponatur baſis d e, baſi, a b, neutra itaq;, quoniam poſitæ ſunt æquales,*

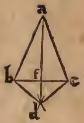


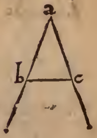
æquales, alteram longitudine uincat. Pun-*ctus igitur f nõ cadet aliò quàm ſuper punctum c. Nam ſi aliò caderet, tunc alterutra linearum aut d f, aut e f, demitteretur: quare per ultimam petitionem altera breuior fieret. Verbi gratia, ſi linea d f demitteretur, ita quidem ut maneret æqualis lineæ a c, tunc e f linea decreſceret neceſſariò, & minor fieret quàm b c linea, quod eſt contra hypotheſin: ſunt enim poſitæ æquales. Igitur non poteſt punctus f alibi quàm in c cadere, poſtquàm d e ſuperpoſita fuerit a b lineæ. Neceſſariò etiam cadet d f linea, ſuper a c lineam, & f c ſuper c b, aliter enim duæ rectæ lineæ clauderent ſuperficiem. Ea propter erunt omnes anguli relatiui, hoc eſt, æquis lateribus contenti inter ſe æquales, per octauam cõceptionem. Nam ſibiinuicem ſuperpoſiti prorſus congruunt ac quadrant.*

QVARTA PROPOSITIO.

Trianguli æquicruri, qui ſupra baſim ſunt anguli, ſibiinuicẽ æquales ſunt. Quòd ſi latera æqualia protrahantur, anguli quoque ſub baſi erunt æquales.

Sit trian-



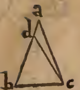


Sit triangulus a b c, cuius latus a b ſit æquale lateri a c. Dico angulum a b c eſſe æqualem angulo a c b. Nam ſupra baſim b c in alteram partem conſtruatur triangulus, ſiue æquilaterus, ſiue æquicrurus, idq; per primam propoſitionē huius capitis, qui ſit b d c, & pūcta a d iungantur linea recta, quæ ſecat baſim in puncto f. Intelligo itaque duos triangulos a b d & a c d, quorum latera unius ſunt æqualia, lateribus alterius. Eſt enim a b æquale a c per hypotheſim, b d uerò æquale ipſi c d per primam huius, & a d eſt utrique triangulo commune: ergo per præcedētem angulus b a d eſt æqualis angulo c a d, quod memori ſerua mente. Rurſus alios duos triangulos intelligo ſcilicet a b f, & a c f: quorum duo latera unius, ſunt æqualia duobus lateribus alterius. Nam b a eſt æquale a c per hypotheſin, & a f utrique commune, anguli prætereà contenti his æquis lateribus ſunt æquales, ut modò oſtendimus: ergo per ſecūdam huius angulus a b f, æquatur angulo a c f, quod erat demonſtrandū. Secunda pars patebit, demonſtrata decima propoſitione.

QV IN-

QVINTA PROPOSITIO.

Si cuius trianguli, anguli ſupra baſim fuerint æquales, latera ſeu crura illius trianguli erũt æqualia.



Sit triangulus a b c, cuius anguli ſupra baſim b & c ſint æquales, dico latera eius a b, & a c eſſe æqualia: quia ſi nõ ſunt æqualia, erit alterũ eorũ lõgius, & ſit illud a b. Reſecetur ergo ad æqualitatem in pũcto d, ut d b ſit æqualis a c, & trahatur linea d c. Intelligo itaq; duos triãgulos a b c totalem, & d b c partialem: & quia duo latera unius ponuntur æqualia duob. laterib. alterius, latus. ſ. d b, æquale lateri a c, ipſo b c exiſtente communi, anguli etiã his æquis laterib. cõtenti, ſunt poſiti æquales: per ſecũdam itaq; huius, trianguli ipſi erũt inter ſe æquales, ut a b c triangulus totus, triangulo d b c partiali, quod eſt impoßibile.

SEXTA PROPOSITIO.

Datum angulum per æqualia diuidere.

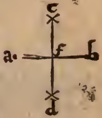


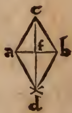
Sit datus angu. in duo æqualia ſecandus a. Lineæ ipſum cõtinentes ſi fuerint inæquales, reſecẽtur ad æqualitatẽ, ſint a b, & a c. Et trahatur linea b c: ſuper qua cõſtituatur triãgul⁹ ſiue eqlaterus, ſiue æqcrur⁹ b d c, et cõtinuẽtur pũcta a d linea recta, q̃ angulũ datũ diuidet. Intelligo enim duos triãgulos, b a d,

los, b a d, & c a d, quorũ latera unius, ſunt æqualia laterib. alterius. Nã a b, æquale eſt a c per hypothe. & b d æquale c d, ꝑ primã huius, & a d utriq; triangulo cõmune. Per tertiam itaque, angulus b a d, æquatur angulo c a d: continentur enim lateribus æqualibus. Quare patet propoſitum.

SEPTIMA PROPOSITIO.

Datam lineã rectam per æqualia ſecare. Sit linea diuidẽda a b. Pone pedẽ immobilẽ circini, ut libet diducti, primo in a, & altero pede circũducto, fac duos arcus occultos, alterum ſupra lineã, alterũ infra. Deinde circino non uariato, pes immobilis ponatur in b, & alter circũduct⁹ interſecet arcus modò ſignatos, ſuperiorẽ quidẽ in pũcto c, inferiorẽ uerò in d. Has ſectiones iũge linea recta c d, q̃ ſecet lineã a b in puncto f. Dico itaq; lineam a b datã, in pũcto f diuiſam ꝑ æqualia. Propter demõſtrationis euidentiã, fac triãgulos manifeſtos, cõtinuãs utrãq; ſectionẽ cũ extremitatibus datæ lineæ. Intelligo enim duos triãgulos c a d, & c b d, quorũ latera uni⁹ ſunt æqualia laterib. alterius: quare ꝑ tertiã angulus c uni⁹ eſt æqualis angulo c alteri⁹. Rurſus intelligo alios duos triãgulos c a f, & c b f, quorũ duo uni⁹ latera ſũt æqualia duob. laterib. alteri⁹. Nã a c eſt æquale c b,



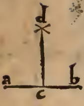


eadem

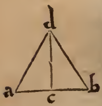
eadem enim circini extentione facta ſunt. Et *c f utriq; triangulo commune, anguli quoq; his æquis laterib. cōtēti ſunt æquales, ut modò oſtenſum eſt: ergo per ſecundā, baſis a f, eſt æqualis baſi f b, q; erat demonſtrādum.*

OCTAVA PROPOSITIO.

A puncto in linea ſignato perpendicularem educere.



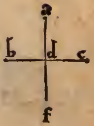
Sit data linea a b, à cuius puncto c, ſit educenda perpendicularis. Signa itaque in linea data, officio circini, duo puncta æquali interuallo à puncto c diſſita, ſintq; a & b; Poſteà pone pedem immobilē circini, utcunque extenſi in a, et altero circungyrato, occultum fac arcū. Deinde *circino non uariato, & pede eius immobili poſito in b, prior arcus ſecetur in pūcto d, à quo ad c deijcatur linea recta.* Hāc *dico eſſe ad a b perpēdicularē. propter demonſtrationē fac triangulum manifeſtū, coniuncto d puncto cum a & b punctis.* Intellige *ergo, duos triangulos a d c, & b d c, qui ſunt omnium inter ſe laterum æqualium: eſt enim a d, æqualis b d, ut quæ eadem circini diſtenſione deliniatæ ſunt, latus quoq; a c, ex hypotheſi eſt æquale c b lineæ, & d c utriq; eſt cōmunis: quapropter p tertiā huius, angulus c unius eſt æqualis c angulo alterius: uterq; igitur p diffini-*

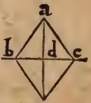


diffinitionem anguli recti, eſt rectus. Linea itaq; d c, perpendicularis eſt ad lineam a b, per diffinitionem lineæ perpendicularis. Animaduertendum eſt, operæprecium eſſe, ſpacio plani in quo trahenda eſt perpendicularis permittẽte, ſi duæ fierent decuſſationes, ſeu interſectiones, altera ſuprà lineam, altera infra, modo quo uſi ſumus in propoſitione ſeptima. Sic enim exactius trahetur perpendicularis.

NONA PROPOSITIO.

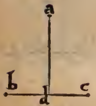
A puncto extra lineam datam ſignato, ad eam demittere perpendicularem.





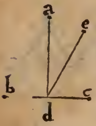
Sit punctus a, & linea ad quam deducenda eſt à pũcto a, perpendicularis ſit b c. Ponatur ergo circini pes immobilis in pũcto a, & altero pede notentur duo puncta in linea data, quæ ſint b c. Deinde circino nõ uariato pedem immobilem primo in b pone, & altero ſcribe arcum occultum. Deinde eodem immobili pede in c poſito, priorem arcum interſeca in puncto f. Hunc cum puncto a continua linea recta a f, quæ ſecet datam lineam b c, in puncto d. Ea perpendicularis eſt ſuper lineam datã. Propter demonſtrationem, trahe à punctis a & f, ad puncta b c, lineas rectas. Ex proceſſu itaq; propoſitionis ſe-

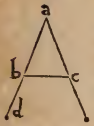
ptimæ,patet lineã b c diuiſam eſſe in puncto d per æqualia. Intellige ergo duos triangulos,a b d,& a d c,qui ſunt omniũ laterum æqualium,ut patet. Quare per tertiam angulus d unius,eſt æqualis angulo d alterius ergo uterq; rectus, per diffinitionem anguli recti: linea itaque a d,perpendicularis eſt,ad lineam b c, per diffinitionẽ lineæ perpendicularis.



X. PROPOSITIO.

Linea recta,ſuper rectam ſtans,facit cũ ea duos angulos, aut rectos, aut duobus rectis æquales.





Sit linea a d,ſtãs ſuper lineam rectã b c, dico angulos,quos cum ea facit,aut eſſe rectos,aut duobus rectis æquales. Nam ſi linea ſuperſtans,eſt ad eã,cui ſuperſtat perpẽdicularis,ut in priori figura, patet propoſitum per diffinitionẽ lineæ perpẽdicularis. Si uerò nõ fuerit perpendicularis, ut in ſecũda figura,emittatur per octauã, ex pũcto d,perpẽdicularis quæ ſit d e. Clarũ igitur eſt angulos rectos,qui fiũt à linea perpendiculari,ſ.e d b, & e d c,tantum occupare ſpacij,quantũ tenẽt duo anguli, quos facit linea nõ perpẽdicularis d a,hoc eſt,anguli a d b,& a d c. quare hi duo illis duobus ſunt æquales per octauã cõmunẽ ſen-

tentiam

tentiam. Ex hac propoſitione liquet ueritas ſecũdæ partis 4. propoſitionis: Si triãguli æquicruri, æqualia latera protrahãtur, angulos ſub baſi eſſe æquales. Sit.n triãgulus æquicrurus a b c, & protrahantur latera eius æqualia a b, & a c, uſq; ad d & f. Dico angulos ſub baſi. ſ. d b c, & f c b eſſe æquales. Nã prima pars eiuſdẽ quartæ, demonſtrauit angulos ſupra baſim. ſ. a b c, & a c b eſſe æquales. Præſens uerò docet angulos a b c, & d b c, ſimul æquari duobus rectis: ſimiliter duos, a c b, & b c f, duobus rectis æquales. Per primã itaq; petitionem duo anguli, a b c, & c b d, ſimul æquantur duob. pariter angulis, a c b, & b c f. Si ergo ab æqualib. demãtur æqualia. ſ. anguli ſuper baſim, relinquẽtur per tertiã cõmunem ſententiã, anguli ſub baſi æquales, quod erat demonſtrandũ.

XI. PROPOSI.

Si duæ rectæ lineæ ſe ſecant, angulos contrapoſitos facient æquales.

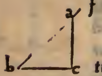


Sint duæ lineæ rectæ a b, & c d, ſecãtes ſe in pũcto e. Dico angulos cõtra poſitos, hoc eſt, a e c, & d e b, uel c e b, & d e a eſſe æquales. Vocamus autẽ angulos cõtrapoſitos, qui nullo cõmunicãt latere. Per præcedentem enim duo anguli a e c, & c e b, æquãtur duobus rectis, ſimiliter duo anguli,

d c b, & b e c rectis duobus pares ſunt. Quapropter per primã petitionem duo anguli a e c, & c e b aggregati, æquales ſunt duobus angulis d e b, & b e c ſimul ſumptis. Ergo *ab æqualibus ablato angulo c e b communi, erunt per tertiam cõmunem ſententiam reſidui a e c, & b e d inter ſe æquales.* Non *aliter probabis duos angulos c e b, & d e a inter ſe æquales eſſe.*

XII. PROPOSITIO.

Omnis trianguli, uno latere producto, extrinſecus angulus utrolibet intrinſeco ſibi oppoſito, maior erit.

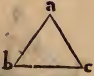


Sit triangulus b a c, & protrahatur latus b a, in directum uſq; ad f. Dico *angulum f a c extrinſecum, maiorem eſſe utrolibet angulo ſibi intrinſecus oppoſito, ſcilicet uel angulo b, uel angulo c.* Nam *per decimã angulus f a c, cũ angulo c a b, æquatur duobus rectis.* Sed *angulus c b a, cum angulo c a b, minores ſunt duobus rectis.* Linea *enim f b, cadit ſuper duas lineas a c, & b c, concurrentes in puncto c, ergo per conuerſionem ſecundæ petitionis facit ad partem concurſus duos angulos minores duobus rectis.* Conſtat *igitur duos angulos f a c, & c a b, ſimul eſſe maiores duobus angulis c b a, & c a b ſimul ſumptis.*

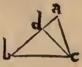
ptis. Dempto ergo ab inæqualibus eodem communi ſcilicet angulo c a b, remanebunt per communem ſcientiam reſidua inæqualia, ſcilicet angulus extrinſecus f a c, maior angulo c b a, intrinſecus ſibi oppoſito. Simili modo probabis angulum f a c, maiorē eſſe angulo a c b.

XIII. PROPOSITIO.

In omni triangulo, maiori angulo, maius latus opponitur.



Sit in triangulo a b c, angulus a maior angulo c. Dico latus b c, maius eſſe latere a b. Nam ſi b a linea, minori angulo ſubtenta æqualis eſt b c lineæ, erit per quartam angulus a, æqualis angulo c, quod eſt contra hypotheſin. Quod ſi dicatur a b maior eſſe, quàm b c, reſecetur ad æqualitatem in puncto d, ita ut b d, ſit æqualis b c. Et quia per quartam, angulus b c d, æquaretur angulo b d c, angulus uerò b d c, per præcedentem, maior eſt angulo b d c, angulus igitur b c d, maior eſſet angulo a, quare multò magis angulus b c a, ſuperaret angulum a, quod idem eſt cõtra hypotheſin.



XIIII PROPOSITIO.

Omnis trianguli, duo quælibet latera ſimul ſumpta, ſunt tertio maiora.



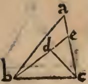
Sit triangulus a b c, dico duo latera, a b,

 & a c,

& a c, ſimul iūcta, longiora eſſe latere b c: Si enim eſſent aut æqualia, aut minora eo, non poſſent concurrere in angulū a. Nam ſi eſſent æqualia lateri b c, tunc ſe cōtingendo iacerēt ſupra lineam b c, & fierent cum e a linea una. Si uerò breuiora eſſent, non poſſent ſe cōtingere, neq; in angulū cōcurrere.

XV. PROPOSITIO.

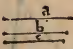
Si in uno quolibet trianguli latere à finibus eius duæ rectæ lineæ interiùs concurrant, angulum facient maiorem eo qui à reliquis eiuſdem trianguli lateribus continetur.



Sit triangulus b a c, ſuper cuius latere b c, duæ rectæ conſtitutæ, angulum faciant b d c: dico eum maiorē eſſe angulo b a c, contēto à reliquis duobus lateribus. Nam protrahatur linea b d, uſq; dum ſecet latus a c, in puncto e. Erit igitur angulus b d c, per duodecimam huius, maior angulo b e c, & per eandem, angulus b e c, maior angulo b a c: multo igitur maior erit angulus b d c, angulo b a c: quod fuit demonſtrandum.

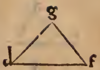
XVI. PROPOSITIO.

Ex tribus datis lineis triangulū cōſtituere.



Sint tres lineæ datæ a b c, ita ut qualibet duæ ſimiles iunctæ ſint tertia maiores. id enim neceſſarium eſt per decimā quartam.

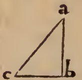
tam. Pone pedem immobilem circini extenſi ſpacio lineæ b, in altero termino lineæ a: uerbi gratia in d, & altero circunducto pede, occultum ſcribe arcum: deinde circino extenſo ſecundum quantitatem lineæ c, & pede eius immobili, poſito in termino f, priorem arcum interſeca in puncto g. Ab hoc interſectionis puncto trahe ad terminos lineæ a, rectas, & habebis triangulũ, quem optabas.

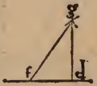


XVII. PROPOSITIO.

Super punctum datum in linea recta, deſcribere angulum, dato angulo æqualem.

Sit punctus d datus in linea data, & angulus a b c datus. Subtende eum recta linea c a. Reſeca igitur ex linea data d f, lineam æqualem c b. Deinde circino diducto ſecundum quantitatẽ lineæ a b, & pede eius immobili poſito in d, ſcribatur arcus occultus. Poſteà circinũ pro ſpacio lineæ c a extende & pede eius in f poſito priorem interſeca arcum in puncto g. A quo ad punctum d trahe rectam. Hæc cũ data li ea cõtinebit angulũ g d f æqualẽ angulo b dato. Nam propter demõſtrationem ducatur linea f g.





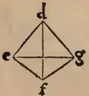
Erunt ex hypotheſibus latera trianguli f g d, æqualia lateribus trianguli a b c, ergo per tertiam angulus g d f, æqualis eſt angulo a b c. Continētur enim æquis laterib.



XVIII. PROPOSITIO.



Si duorum triangulorum duo latera unius, fuerint æqualia duobus lateribus alterius, & anguli contenti his æquis lateribus fuerint inæquales, erit illius baſis maior, cuius lateribus angulus amplior continetur.



ſint duo trianguli a b c, e d f, & latera duo prioris a b, & a c, ſint æqualia duobus lateribus poſterioris, d e, & d f, & angulus a, maior angulo d. Dico baſim b c maiorem eſſe baſi e f. Nam ſuper puncto d lineæ, d e locetur, per præcedentem angulus æqualis angulo b a c, ſitq́; is e d g, & linea d g, ſit æqualis a c, ſubtendaturq́; baſis e g, quæ neceſſariò erit æqualis baſi b c, in triangulo a b c. Quapropter ſi probauerimus e g maiorem eſſe e f, erit quoque probatum b c eādem eſſe maiorem. Trahatur f g linea. Et quia d g, poſita eſt æqualis d f, igitur per quartā angulus d f g, eſt æqualis totali angulo d g f, ergo idem angulus d f g, erit maior partiali angulo e g f, quare multò maior erit angulus e f g, an-

gulo

gulo e g f. Latus igitur e g, maius eſt per decimamtertiam latere e f, quod erat demonſtrandum.

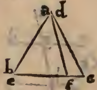
XIX. PROPOSITIO.

Si ſuper baſes duorum triangulorum anguli iacentes fuerint æquales, & baſis unius æqualis baſi alterius, aut unum latus unius, lateri alterius ſe reſpiãenti æquale, erunt reliqua latera reliquis æqualia alterum alteri, & reliquus angulus reliquo angulo.

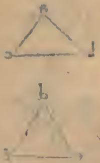


Sint duo trianguli a b c, d e f, & angulus b, ſit æqualis angulo e, & angulus c, angulo f. Sitq; baſis b c, æqualis baſi e f, aut unum ex lateribus trianguli a b c, æquale ſuo relatiuo lateri trianguli d e f. Dico reliqua latera, reliquosq; angulos eſſe æquales. Sint primò baſes æquales, & intelligatur baſis e f, ſuperponi baſi b c: quæ cùm ſint æquales, neceſſe eſt punctum e cadere ſuper punctum b, & punctum f, ſuper c. Et propter æqualitatem angulorũ & conuerſionem octauæ conceptionis, neceſſe eſt lineam e d, cadere ſuper a b, & d f, ſuper a c: nõ ergo erit poßibile ut latera huius ulteriùs aut citeriùs lateribus alterius concurrant: erunt igitur æqualia & anguli ab eis



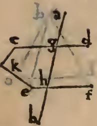


ab eis cõtenti æquales per 8. conceptionẽ. Ponatur ſecũdo latus d e, æquale lateri a b: & alterum alteri ſingatur ſuperponi: propter æqualitatem ergo eorum, pũctus d cadet ſuper a punctũ, & e ſuper b: linea denique e f, ſupra b c lineam cadet, propter æqualitatẽ angulorũ, & cõuerſionẽ octauæ cõceptionis. Quòd ſi d f cõgruerit etiã ipſi a c, concludes per octauã conceptionem propoſitum. Sin uerò d f ceciderit aut intra aut extra triangulum, ſemper ſequetur angulum extrinſecum eſſe æqualem angulo intrinſeco ſibi oppoſito, cuius contrarium demonſtrauit propoſitio duodecima.



XX. PROPOSITIO.

Si linea recta duas lineas rectas ſecando fecerit angulos coalternos æquales, aut angulum extrinſecũ angulo intrinſeco ex eadem parte ſumpto æqualem, aut duos intrinſecos ex eadem parte, duobus rectis æquales, lineæ ſectæ æquidiſtabunt.

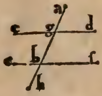


Linea a b, ſecet c d, & e f, lineas, c d quidem in pũcto g, e f uerò, in pũcto h. Et faciat primò angulos coalternos ſibijnuicem æquales, hoc eſt, angulũ d g h, angulo e h g, aut angulũ f h g, angulo c g h, ſic enim ſumpti coalterni dicũtur. Dico lineas c d, et e f, æquidiſtare. Si autẽ non productæ concurrant,

currant, uerbi gratia in k. Trianguli ergo g k h, angulus d g h extrinſecus æqualis eſt angulo k h g, angulus d g h extrinſecus æqualis eſt angulo k h g, intrinſeco ſibi oppoſito, aut angulus f h g, intrinſecus angulo k g h intrinſeco ſibi oppoſito, hoc autem per duodecimā propoſitionem impoßibile eſt, igitur c d, & e f productæ minimè cōcurrūt, ergo per definitionem ſunt æquidiſtantes. Secundò ſi cadat linea a b angulū aliquem extrinſecū, æqualē intrinſeco ſibi oppoſito ex eadē parte. Dico nihilo minùs lineas c d, & e f æquidiſtare. Et ſit exempli cauſſa angul⁹ a g d extinſecus æqualis intrinſeco g h f. Quoniā angulus a g d, æqualis eſt per hypotheſim angulo g h f. Et per undecimā idē angulus a g d, æqualis eſt e g h angulo, igitur per primā cōmunē ſententiam anguli e g h, & g h f inter ſe ſunt æquales. Et hi ſunt coalterni, ergo per primā huius propoſitionis partem lineæ c d, & e f, ſunt æquidiſtantes. Tertiò ſi cadat linea a b duos angulos intrinſecos ex eadem parte, æquales duob. rectis, ut d g h, & f h g, dico lineas c d, et e f æquidiſtare, quoniā anguli d g h, & f h g per hypothe. ſunt æquales duob. rectis, & per decimā angoli d g h, et e g h, etiam æquātur duob. rectis, ergo per

primum

primum poſtulatum anguli d g h, & f h g, æquales ſunt angulis d g h, & c g h. Ablato ergo communi angulo d g h, relinquitur per tertiam communem ſententiam, angulus c g h, æqualis angulo f h g: ſed hi ſunt coalterni. ergo per primã partẽ huius propoſitionis lineæ c d & e f, æquidiſtant.



XXI. PROPOSITIO.

Si linea recta duas æquidiſtantes ſecuerit, faciet angulos coalternos æquales. Extrinſecum intrinſeco ex eadẽ parte ſumpto æqualem. Et duos intrinſecos ex eadem parte æquales duobus rectis.

Repetatur prior figura, in qua ponantur c d, & e f æquidiſtãtes. Prima pars propoſitionis ſic demonſtratur: Nam ſi anguli coalterni, ut c g h, & f h g, non ſunt æquales, erit alteruter eorum maior, ſitq́; c g h maior. Quoniam igitur c g h maior angulo f h g, ponatur cõmunis angulus d g h: anguli ergo per quintã conceptionẽ c g h, & d g h maiores ſunt angulis d g h, & f g h, ſed p decimã anguli c g h, et d g h æquales ſunt duob. rectis, ergo anguli d g h, & f h g minores ſunt duob. rectis, ergo per ſecundã petitionẽ c d, & e f protractæ cõcurrunt: nõ igitur ſunt æquidiſtãtes, quod eſt cõtra hypotheſin, angulus igitur c g h, æqualis

eſt ſuo

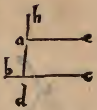
eſt ſuo coalterno f g h.

Secunda pars oſtenditur. Nam ut modò oſtenſum eſt, angulus c g h, æqualis eſt angulo f g h: & per undecimam idem angulus c g h, æqualis eſt angulo a g d, per primam igitur conceptionem, angulus a g d, æqualis eſt angulo f g h, extrinſecus ſãliat intrinſeco ex eadam parte.

Tertia pars oſtenditur: Nam angulus c g h, æqualis eſt per primam huius partem, angulo f g h: poſito ergo cõmuni angulo d g h, erunt duo anguli per ſecundam petitionem, c g h, & d g h, æquales duobus angulis, f h g, & d g h: ſed per decimam, duo anguli c g h, & d g h, æquales ſunt duobus rectis, ergo & duo anguli, f g h, & d g h, æquales ſunt duobus rectis quod erat demonſtrandum.

XXII. PROPOSITIO.

***A** puncto extra lineam datam aßignato educere æquidiſtantem datæ lineæ.*

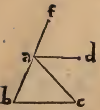


Sit linea data b c, & pũctus extra eam aßignatus a. Trahe lineam occultam h a d utcunq; contigerit: deinde ſuper puncto a, colloca angulum h a e, extrinſecum, protracta linea a e, æqualem angulo a d c intrinſeco ex eadem parte. Conſtat igitur per ſecundam partem uiceſimæ, lineam a e æquidiſtare

diſtare lineæ b c.

XXIII. PROPOSITIO.

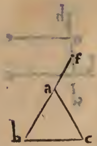
Cuiuſlibet trianguli angulus extrinſecus æqualis eſt duobus angulis intrinſecis ſibi oppoſitis.



Sit triangulus a b c, & protrahatur latus b a, in f: dico angulum f a c, extrinſecum æqualẽ eſſe duob. intrinſecis, & oppoſitis, ſcilicet angulis b & c. Ducatur *per præcedentem à puncto a, linea a d æquidiſtans b c lineæ.* Et *quia a d æquidiſtat b c lineæ, & in ipſam incidit f b, erit per ſecundam partem uicesimæprimæ angulus f a d extrinſecus, æqualis intrinſeco ex eadẽ parte angulo a b c.* Rurſus *quia parallelæ ſunt a d, & b c, & eas ſecat c a: igitur per primã partem eiuſdẽ.* 21. *angulus d a c, æqualis eſt ſibi coalterno angulo a c b.* Totus *igitur f a c extrinſecus æqualis eſt duobus intrinſecis & oppoſitis c b a, & a c b.*

XXIIII. PROPOSITIO.

Cuiuslibet trianguli tres anguli æquales ſunt duobus rectis.



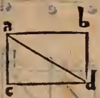
Nam per præcedentẽ angulus f a c extrinſecus æqualis eſt duob. angulis intrinſecis, & oppoſitis c b a, & a c b, addito ergo utriſq; cõmuni angulo c b a, erunt duo anguli f a c, & c a b æquales tribus a b c,

a c b

a c b,c a b:ſed per decimam duo anguli f a c,& c a b æquales ſunt duobus rectis,tres igitur a b c,a c b,& c a b,duob. rectis ſunt æquales,quod erat demonſtrandum.

XXV. PROPOSITIO.

Diameter parallelogrãmi,diuidit ipſum per æqualia.

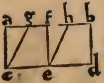


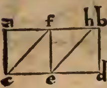
Sit parallelogrãmum a b c d,cuius diameter ſit a d.Dico hac diametro parallelogrammum æqualiter ſecari. Quoniam a b & c d æquidiſtant,& ſuper eas cadit a d, eſt per primam partem uiceſimæ primæ angulus b a d ſuo coalterno a d c æqualis. Rurſus quoniam a c, & b d ſunt parallelæ,& eis incidit a d,erit per eandem 21. b d a ſuo coalterno c a d æqualis.Sunt itaque duo trianguli a b d,& a c d,& anguli bini ſuper communem baſim a d, ſunt æquales,per decimam nonam: ergo reliqui anguli & latera ſunt æqualia, quare per ſecundam propoſitionem triangulus triangulo æqualis. Hinc etiam diligenter intuenti patet, latera cuiuſcunque parallelogrãmi oppoſita eſſe æqualia.

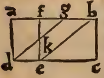
XXVI. PROPOSITIO.

Omnia parallelogramma ſuper eandem baſim, atque in lineis alternis collocata, ſunt æqualia.

Sint







Sint lineæ alternæ, hoc eſt, æquidiſtantes, a b, & c d, inter quas ſuper eandem baſim c e, ſint collocata duo parallelogramma ſcilicet a c e f, & g c e h, dico ea eſſe æqualia. Et *ſit primo ut g cadat inter a & f: & quia a f eſt æqualis g h, cum utraque ſit æqualis c e, ergo ablata cõmuni g f, remanebunt a g, & f h æquales, & a c, eſt æqualis f e, propter æquidiſtantiam: angulus quoque h f e extrinſecus eſt æqualis angulo g a c intrinſeco per ſecundam partem uiceſimæ primæ. Cùm ergo duorum triãgulorũ h f e, & g a c, duo latera unius ſunt æqualia duobus lateribus alterius, & anguli æquis lateribus contenti æquales, erit per ſecundam alter triangulorum alteri æqualis, addito ergo eis communi trapezio f g c e, erũt aggregata, hoc eſt, dicta parallelogramma æqualia.* Secundò *cadat g in ipſum punctum f, ut in ſecunda figura: & quia f a, eſt æqualis h f, cum utraque ſit æqualis c e oppoſitæ, & a c æqualis f e oppoſitæ, & angulus h f e æqualis angulo f a c intrinſecus ſcilicet extrinſeco, per ſecundam itaque erunt trianguli f a c, & h f e æquales, addito ergo utrique triangulo communi f e c, erunt per conceptionem aggregata a f c e, & h f c e, hoc eſt, ipſa parallelo-*

rallelo-

rallelogrãma æqualia. Tertiò cadat g extra f, ut in tertia figura. Et quia a f eſt æqualis g h, addita ergo communi f g, erit a g æqualis f h, & erit propter prius dicta triangulus g a c æqualis triangulo h f e. Ablato ergo ab utriſq; communi triangulo f k g, quæ relinquuntur trapezia erunt æqualia, ſcilicet a f k c, & g k e h. Quibus ſi addatur communis triangulus c k e, erunt aggregata æqualia, quod erat demonſtrandum.

XXVII. PROPOSITIO.

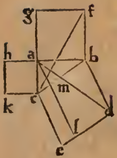
Si ſuper unam baſim & inter lineas æquidiſtantes, parallelogrammum & triangulus ponantur, parallelogrammum triangulo duplum erit.

Sint ut priùs, duæ lineæ a b, & c d æquidiſtantes, inter quas ſuper baſim c e, ſit parallelogrammum a c e f, & triangulus g c e. dico parallelogrammũ duplum eſſe triangulo. Nam ducatur à puncto e, linea e h, æquidiſtans c g. Per præmiſſã ergo parallelogrammum c g e h æquale eſt parallelogrammo a c e f. Sed per 25. e g cùm ſit diameter parallelogrammi c g e h. diuidit ipſum per æqualia, quapropter triangulus c g e, eſt dimidium parallelogrammi c g e h, quare etiam parallelogrammi a c e f,

quod eſt propoſitum.

XXVIII. PROPOSITIO.

In omni triangulo rectangulo, quadratū lateris oppoſiti, angulo recto, æquale eſt duobus quadratis reliquorum duorum laterum.



Sit triangulus a b c, cuius angulus a rectus. Quadrentur tria latera, ſitq; quadratum lateris b c oppoſiti angulo recto, b c d e, dico ipſum eſſe æquale reliquis duobus quadratis, ſcilicet a b f g, a b c K, quæ ſunt laterum angulum rectum continentium. Ducatur enim ab angulo recto a ad baſim d e, quadrati b c d e perpendicularis, quæ ſecet b c in m, & d e in l. Hæc perpendicularis diuidit quadratum lateris obtenti angulo recto in duo parallelogramma, ſcilicet b m d l, & m l c e, quorum ſiniſtrum dico eſſe æquale quadrato ſiniſtro, & dextrum quadrato dextro. Horum utrunque eodem modo probatur. Nam trahantur lineæ a d, & c f, & probabimus quadrangulum dextrum, ſcilicet b m d l, æquale eſſe quadrato dextro, ſcilicet f g b a hoc modo. Nam quadratum f g b a duplum eſt triangulo f b c per præcedentem: conſtituuntur enim inter lineas æquidiſtantes g c, & f b ſuper eandem baſim f b. Similiter rectangulum b m d l duplum eſt triangulo a b d.

Nam

Nam ſuper eandem baſim b d inter lineas æquidiſtantes b d, & a m l ponuntur. Sed trianguli dicti ſunt æquales, ut mox probabitur, ergo rectangula ipſa adæquales triangulos dupla, ſunt inter ſe æqualia per ſextam conceptionem. Triangulos æquales eſſe ſic patet. Sunt enim latera f b, & c b trianguli f b c, æqualia lateribus a b, b d, trianguli a b d, alterum alteri, anguli inſuper his æquis lateribus cōtēti ſunt æquales, ſcilicet f b c, & a b d, uterque enim cō ſtat angulo recto, & angulo communi a b c: ſunt igitur per ſecundam triāguli æquales. Eodem modo oſtendes ſiniſtrum rectāgulū c m l e æquale eſſe quadrato ſiniſtro h a c k, ductis lineis a e, & b k. Totū ergo quadratū b d c e, æquale eſt duob. quadratis a b f g, & a h c k, quod erat demōſtrādum.

CAPVT SECVNDVM, DE CIRCVLIS.

DEFINITIONES.

Circulus eſt figura plana, una linea cō tenta, in cuius medio pūctus eſt, à quo omnes lineæ rectæ ad circūferentiam exeuntes ſibijnuicem ſunt æquales.

Circũferentia, eſt linea cõtinens circulum.

Centrũ, eſt medius ille pũctus in circulo.

Diameter circuli, eſt linea recta quæ per eius centrum tranſiens, extremitatesq́; ſuas circunferentiæ applicans, circulum in duo media diuidit.

Semicirculus, eſt figura plana, diametro circuli, & medietate circunferẽtiæ contenta.

Portio circuli, eſt figura plana, recta linea & parte circunferentiæ contenta, ſemicirculo aut maior, aut minor.

Circulum linea contingere dicitur, quæ cum circulum tangat, in utranque partem eiecta eum non ſecat.

Chorda, eſt recta linea, portionem circuli continens.

Angulus ſupra arcum conſiſtere dicitur, qui à quolibet puncto arcus, ad terminos chordæ duabus lineis rectis exeuntibus continetur.

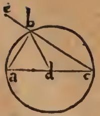
Angulus conſiſtere ſupra centrum dicitur, qui à duabus lineis rectis à centro ad circunferentiam protractis continetur.

PRIMA PROPOSITIO.

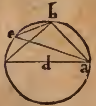
Angulus rectilineus, in ſemicirculo ſupra arcum conſiſtens, rectus eſt. In portione uerò minore ſemicirculo, cõnſiſtens, obtuſus. Et in portione, ſemicirculo maiore

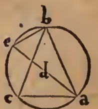
re

re acutus eſt.



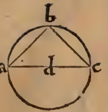
Sit circulus a b c, cuius diameter a d c, & in ſemicirculo a b c, conſiſtat angulus rectilineus a b c: dico eum eſſe rectum. Nam ducatur b d linea, & protrahatur c b ad e. Et quia lineæ d b, & d a, per definitionem circuli ſunt æquales, erit per quartam primi capitis angulus d b a æqualis angulo d a b. Similiter propter æqualitatem linearum d b, & d c, angulus d b c, æqualis eſt angulo d c b. Totus itaq; angulus a b c, æqualis eſt duobus angulis d a b, & d c b. At eiſdē æquatur per 23. pri. cap. angulus extrinſecus e b a, ergo per primam cōmunem ſententiam angulus e b a, æqualis eſt angulo a b c, ergo per definitionem anguli recti uterq; eſt rectus. patet igitur propoſitum. Rurſus in portione c b a minore ſemicirculo, conſiſtat angulus rectilineus c b a, dico eum eſſe obtuſum. Ducatur per centrū circuli, quod ſit d, linea a d e, & iungatur b e. Et quia angulus a b e conſiſtit in ſemicirculo, ideo per primā huius propoſitionis eſt rectus, ſed angulus a b c eſt maior eo, per definitionem, igitur obtuſus eſt. Porrò in portione a b c ſemicirculo maiore, cōſiſtat angulus rectilineus a b c, dico eum eſſe acutum. Ducatur per centrum linea a d e,





*& linea b e. Et quia angulus a b e in ſe-
micirculo conſiſtit,igitur eſt rectus: angu-
lus uerò a b c,eſt minor eo,ergo per diffini
tionem eſt acutus.*

SECVNDA PROPOSITIO.



Circuli propoſiti centrum inuenire.

*Sit circulus a b c,eius centrum ſic inuenie-
mus.Protrahatur ut lubet chorda a b, &
ſuper alterum eius extremitatem cõſtitua-
tur angulus rectus:uerbi gratia,ſuper ter-
minum b, ſit locatus a b c angulus rectus,
ducta linea b c uſque ad circumferentiam
circuli.Deinde ducatur linea a c,eaq́; per
medium diuidatur in puncto d,hũc dico eſſe
centrum circuli.Nam per hypotheſin an-
gulus a b c eſt rectus: ergo per conuerſam
præcedentis,portio a b c, in qua conſiſtit,
eſt ſemicirculus, linea itaque a c diameter,
punctusq; eius medius d centrum.*

III. PROPOSITIO.



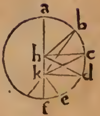
*Si linea à centro extens,chordã per æqua
lia ſecuerit,ad eam erit perpendicularis.*

*Sit circulus a b, cuius centrum c.à quo
extenſa recta c d,chordam a b per æqua-
lia ſecet in puncto d, dico perpendicularem
eſſe c d ad a b. Trahantur c a, & c b li-
neæ.Et quia trianguli a c d latera æqualia
ſunt lateribus trianguli c d b.Eſt enim per
hypotheſin*

hypotheſin a d æqualis d b, & per definitionem circuli c a, æqualis c b, communis autem utrique triangulo c d. Ideo per tertiam primi, anguli c d a, & c d b ſunt æquales, quare uterque rectus: linea igitur c d perpendicularis eſt ad lineam a b per definitionem.

QVARTA PROPOSITIO.

Si in diametro circuli præter centrum ſignetur punctus, & ab eo ad circũferentiam plurimæ lineæ ducantur. Quæ per centrum tranſierit, erit omnium longiſſima. Et quæ diametrum perfecerit, omnium erit breuiſſima. Reliquæ quæ centro propiores fuerint, remotioribus erunt longiores.



Sit punctus K *ſignatus in diametro a f, circuli a b c d, cuius centrum h, & ducantur ab eo ad circũferentiam lineæ* K *b,* K *c,* K *d,* K *e. Dico a h* K*, quæ per centrũ trãſit, omnium eſſe longiſſimam,* K *f, quæ diametrum perficit, omnium breuiſſimam;* K *b longiorem eſſe* K *c, quod centro propinquior ſit. Et eãdem ratione c* K *longiorem eſſe d* K*, atq; de alijs ſimiliter. Connectantur h b, h c, h d. Quoniam per decimam pri.æ. in triangulo* K *h b, duo latera* K *h, & h b ſunt maiora latere* K *b, & a h, & h b per definitionẽ circuli ſunt æquales. Ideo per ſe*

 cundam

cundam cõceptionẽ, a h k, æqualis eſt duabus b h, & h k, quare & a h k maior eſt b k. Rurſus quoniã b h æqualis eſt c h, & h k eſt cõmunis. Ideo per ſecundam conceptionem b h, & h k lineæ ſunt æquales c h, & h k lineis, & angulus b h k maior eſt per nonam communem ſententiam, angulo c h k. Ideo per decimam octauam primi capitis baſis b k maior eſt baſi c k. Et ob eandẽ rationem c k, maior eſt d k, & d k, maior e k. Conſtat ergo eam quæ per centrum tranſit, omnium eſſe longiſſimam, & propinquiores centro, remotioribus lõgiores eſſe. Rurſus d k, & h k per decimam quartam primi capitis, maiores ſunt d h. at d h per definitionem circuli æqualis eſt f h: igitur d k et k h maiores ſunt h f, ergo per quartam cõmunem ſententiã, ablatâ utrinque k h communi, reliqua d k maior erit f k. Eadem ratione f k minor eſſe oſtenderetur, quàm e k, ſi protracta eſſet è centro h e. Manifeſtum eſt ergo f k, quæ diametrũ perficit, omnium eſſe minimam.

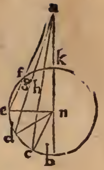
V. PROPOSITIO.

Si extra circulum ſignetur pũctus, & ab eo ad circumferentiam, ſecantes eam, plurimæ ducantur lineæ: quæ per cẽtrum tranſierit, omnium erit longiſſima. Cẽtro autem

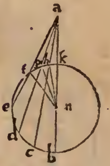
propio-

propiores, remotioribus longiores.

Particularum autem, quæ extrinſecùs cirfērētiæ applicātur, breuiſsima erit quæ diametro cōtinuatur, & ei propinquiores remotioribus breuiores.



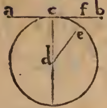
Sit extra circulum h e d c b, cuius centrum n punctus a ſignatus, & ab eo ad circumferentiam, ipſam ſecando trahantur plurimæ lineæ, ut a n b, a h c, a g d, a f e. Dico inter eas, a n b, quæ per centrū trāſit, omnium eſſe longiſsimum, reliquas uerò quò centro propinquiores, eo longiores. Præterea dico inter particulas dictarum linearum exteriores, a k quæ diametro continuatur, breuiſsimam eſſe, & reliquas tātò minores, quantò huic breuiſsimæ uiciniores. Prima pars oſtenditur. ducantur n c, n d, n e. Et quia a n, & n c æquales ſunt lineæ a n b, maiores autem per decimam quartam, quàm a c, erit a n b quoq; maior a c. Simili modo a n b maior oſtenditur cæteris ex puncto a ductis. Secunda pars ſic aſtruitur. Et quia a n, & n c ſunt æquales a n, & n d lineis, angulus uerò a n c, maior eſt angulo a n d. Ideo per decimam octauam primi a c baſis maior eſt, a d baſi. Haud aliter docebis a d maiorem eſſe a e. Tertia pars probatur protractis. lineis n b, n g,



h, n g, n f. Nam a h, & h n, ſunt per decimam quartā primi capitis maiores a n, ideo per quartam communem ſententiam, Si ab eis æqualia auferantur n k, & n h, erit a h reſidua maior a k. Eodē modo omnes aliæ exteriores particulæ conuincuntur maiores eſſe a k. Quarta pars ſic oſtenditur. Nam a n, & n h ſunt æqualia laterib. a n, & n g, angulus autem a n h minor angulo a n g: baſis igitur a h per decimamoctauam primi minor eſt baſi a g.

VI. PROPOSITIO.

Si circulum recta linea contingat, & a puncto contactus ad centrum ducatur recta linea, ipſa erit ad contingentem perpendicularis.

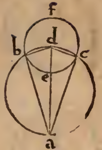


Sit linea a b contingens circulum c e in puncto c, à quo ad centrum d, ducatur recta linea c d, quæ ſi non eſt perpendicularis ad comtingentem a b, ſit d f perpendicularis ad eam ſecans circūferentiā in puncto e. Et quia angulus d f c eſt rectus, erit angulus f c d minor recto propter uiceſimam quartam primi. Latus igitur d c per decimam tertiā primi capitis maius erit latere d f, ſed d e eſt æqualis d c per definitionem circuli: ergo & d e erit maior d f, pars ſuo toto, quod eſt impoßibile.

VII.

VII. PROPOSITIO.

A puncto dato ad circulum ducere lineam contingentem.

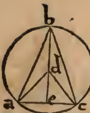


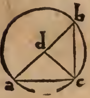
Sit punctus datus a, circulus b f c, cētrum eius d. Ex *puncto a ad circulum b f c, ſic ducitur contingens.* Pun*ctum a iunge cum cētro circuli d linea recta, quā per æqualia diuide in puncto e, factoq; eo centro duc circulum occultum, qui ſecet circulum datum b f c in duobus pūctis b & c.* Deinde *à pūcto dato a ad puncta ſectionum b & c trahantur lineæ rectæ a b & a c, has dico circulū contingere.* Du*cantur a centro d ad puncta interſectionum lineæ d b, & d c, & circulus ſuper e centro ſcriptus fiat manifeſtus.* Et *quia uterque angulorum d c a, & d b a cōſiſtit ſupra arcum in ſemicirculo circuli deſcripti ſuper centro e, ideo per primā huius cap. uterq; eſt rectus, & uterq; continetur linea ducta à centro parui circuli b f c, ad punctū quo linea ex puncto a ducta circulum b f c tangit. Ideo per conuerſam præcedentis lineæ a b, & a c contingūt circulum b f c, quod erat demonſtrandum.*

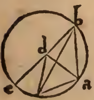
VIII. PROPOSITIO.

In circulo angelus conſiſtens ſuper centrū, duplus eſt eius qui ſuper circumferentiā cōſiſtit, quādo anguli eandē baſim habuerint.

Sint







Sint in circulo a b c, cuius centrum d, ſuper unam baſim, id eſt, arcum a c duo anguli, quorum alter a b c ſuper arcũ conſiſtat: altèr autem a d c, ſuper centrum, dico angulum a d c centralem, eſſe duplum ad angulum a b c circumferentialem, quod ſic oſtenditur. Aut enim latera circumferentialis anguli includunt, angulum centralem ut in prima figura, Aut alterum ex lateribus angulum circumferentialem continentibus, fit una linea cum altero laterum anguli centralis, ut in ſecunda figura. Aut unum ex lateribus anguli circumferentialis ſecat alterum ex lateribus anguli centralis, ut in tertia figura. Includant ergo primò latera anguli ad circunferentiam b a, & b c, angulum a d c centralem, & trahatur linea b d e. Et quia angulus a d e extrinſecus per 23. pri. cap. eſt æqualis duob. angulis intrinſecis & oppoſitis, d b a, d a b, & hi ſunt æquales, per quartam primi cap. eſt enim d b æqualis d a per definitionem circuli, ideo angulus a d e duplus erit anguli d b a. propter eandem cauſſam angulus e d c duplus eſt ad angulum d b c, totus igitur a d c centralis duplus eſt ad a b c angulum circumferentialem. Secundò ſit latus a b anguli ad circũferentiam una

linea

linea cum latere a d anguli, ad centrum, ut in ſecunda figura. Et quia angulus a d c æqualis eſt per 22. primi capi. duobus intrinſecis angulis d b c, & d c b. Hi autem ſunt æquales per quartam primi. Ideo ad unum eorum, hoc eſt, angulũ a b c circumferentialem, duplus eſt angulus a d c centralis. Tertiò latus a b anguli ad circumferentiam ſecet latus d c anguli ad centrum, ut in tertia figura. Producatur linea b d uſque ad e. Per 23. igitur primi erit angulus e d c æqualis duobus angulis d b c, & d c b, hi autem ſunt æquales per 4. primi cap. Ideo angulus e d c duplus eſt ad angulum d b c. Præterea angulus e d a per eandem 23. primi, duplus eſt ad angulũ d b a. Dempto igitur hinc duplo e d a, illinc ſimplo d b a, erit reſiduus a d c centralis duplus ad reſiduum, a b c circũferentialem, quod erat demonſtrandum.

IX. PROPOSITIO.

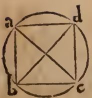
In eadem portione quotlibet anguli ſuper arcum conſiſtentes æquales ſunt.



Quod uniuerſaliter proponitur de angulis conſiſtentibus ſuper circũferentiam, demonſtratur tantùm de his angulis, qui ſuper arcum maiorem ſemicirculo conſiſtunt. Non attinet enim id demonſtrare de angulis

angulis ſuper ſemiarculum conſiſtentibus, quos omnes prima propoſitio huius capitis docuit eſſe rectos, & ea propter, æquales prima petitione aſtipulante. De angulis autem ad arcum minorem ſemicirculo, non poteſt oſtendi eos eſſe æquales, niſi prius ſequens propoſitio demonſtretur. In portione igitur a c d e b maiore ſemicirculo conſiſtant ſuper arcum anguli a c b, a d b, a e b, dico eos eſſe æquales. Nam à centro arculi f ducantur lineæ f a, & f b. Et quia angulus a f b centralis ſuper ea ſtat baſi, ſuper qua angulus a c b: circumferentialis igitur ad eum duplus propter præcedentem, & eadem ratione erit duplus ad angulum a d b, & angulum a e b, ergo per ſeptimam communem ſententiam ſunt inter ſe æquales.

X. PROPOSITIO.



In circulis quadrilaterorum exiſtentium anguli oppoſiti, duobus rectis ſunt æquales.

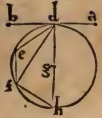
Sit circulus a b c d, & in eo quadrilaterum a b c d, dico quoſlibet duos eius angulos oppoſitos ſimul duobus rectis æquari. Nam

ri. Nam ex prima huius perſpicuum eſt unum angulum rectum à ſemicirculo ſuſcipi, quapropter duo recti anguli à toto ſuſcipiuntur circulo. Sed quicunque duo anguli oppoſiti in quadrilatero a b c d à toto ſuſcipiuntur circulo: ergo æquales ſunt duobus rectis, ut angulus b a d ſuſcipitur ab arcu b a d, & angulus b c d ſuſcipitur ab arcu b c d: arcus autem b a d, & b c d totum circulum integrant, ergo patet propoſitum. Quòd ſi angulus a d c, & a b c conſideres, idem experieris. Ex hac propoſitione liquidum eſt, quotlibet angulos conſiſtentes ſuper arcum in portione minore, ſemicirculo eſſe æquales. Nam ſinguli eorum cum anglo conſiſtente in reliqua portione faciunt quadrilaterũ, & propter hanc propoſitionem ſinguli eorum cum angulo reliquæ portionis æquales ſunt duobus rectis: per primã ergo petitionem, ſinguli cum angulo portionis reliquæ ſunt æquales ſingulis cum eodem angulo: ablato ergo undique communi angulo, conſiſtente ſcilicet in reliqua portione, relinquentur inter ſe æquales anguli conſiſtentes in portione minore ſemicirculo.

XI.

XI. PROPOSITIO.

Si circulum linea recta contingat, & à cõtactu in circulum, quædam eum diſpeſcens recta linea, præter centrum ducatur, anguli quos cum contingente facit, æquales ſunt eis, qui in alternis circuli portionibus conſiſtunt, angulis.



Sit linea a d b contingens circulum d e f h, cuius centrum g, & a puncto contactus d trahatur præter centrum linea d f, quæ ſecat circulum in duas portiones, ſiniſtram d e f, dextram d h f, faciatq; angulos duos cum contingente b d f ſiniſtrum, & a d f dextrum. Dico angulũ ſiniſtrum, quem facit linea d f cum contingente, ſcilicet b d f, æqualem eſſe angulo, quem ſuſcipit dextra circuli portio d h f. Et angulum dextrum quem facit linea d f cum contingente ſcilicet a d æqualem eſſe angulo quẽ ſiniſtra ſuſcipit portio d e f. Trahatur à puncto contactus per centrum linea d g h, & connectatur f h: conſtituatur etiam in portione d e f angulus ut lubitum fuerit. Quicquid de his duobus angulis monſtratum fuerit, de omnibus ab his duabus portionibus, ſuſceptis indubitanter procedet. Sunt enim omnes, qui ab eadem portione ſuſcipiũtur anguli, æquales per nonã huius.

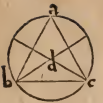
Et quia

Et quia angulus d f h in ſemicirculo conſiſtit, ideo per primam huius eſt rectus, reliqui ergo duo anguli, de triangulo d f h, ſimul uni recto æquantur per 24. primi capitis, angulus quoque totus b d h rectus eſt per ſextam huius, per primam itaque petitionem duo anguli d h f, & f d h æquales ſunt angulo b d h. Ablato ergo communi angulo f d h, erunt reſidui b d f, & f h d æquales, quæ fuit propoſiti una pars: Rurſus duo anguli f h d, & f e d in quadrilatero f h d e, per decimam huius ſunt æquales duobus rectis. At per decimã primi capitis, duo anguli b d f, & a d f æquè ſunt duobus rectis pares: ergo per primam poſtulationem duo anguli f h d, & f e d ſunt æquales duobus angulis b d f, & a d f. Ablatis ergo æqualibus utrinque angulis, hinc quidem f h d, illinc autem b d f, erunt per tertiam cõceptionem reſidui anguli d e f, & a d f, inter ſe æquales, quæ eſt propoſiti altera pars.

XII. PROPOSITIO.

Cuicumque triangulo circumſcribere circulum.

D *Sit trian-*



Sit triangulus a b c, cui circumſcribitur circulus hoc modo. Pes immobilis circini ut libet extenti ponatur primò in a, & altero pede fiant duo occulti arcus, alter ſupra lineam a b, alter infra eam. Deinde circino non variato, pedem immobilem transfer ad angulum b, & priores arcus interſeca, punctáque ſectionum iunge linea recta. Similiter fiant duæ interſectiones ſupra & infra lineam a c, aut b c, & interſectiones, ut antea, iunge linea recta. Hæc cum priori concurret: concurrat autem in puncto d, hunc dico eſſe centrum circuli circumſcribendi triangulo a b c. Nam ab angulis ad punctum d trahe lineas rectas d b, d a, d c, hæ facilè probantur eſſe æquales per ſecundam primi capitis. Lineæ enim ſectiones iungentes, ſecant latera trianguli per media, & ſunt ſuper eas perpendiculares.

CAPVT TERTIVM, De Proportione.

Proportio, eſt duarum quantitatum eiuſdem generis, inter ſe habitudo.

Proportio eſt duplex: Rationalis, & Irrationalis.

Propo-

Proportio rationalis, eſt quæ denominatur ab aliquo numero, & eſt inter quantitates commenſurabiles.

Proportio irrationalis, eſt quæ non denominatur ab aliquo numero, & eſt inter quantitates incommenſurabiles, ut inter coſtam & diametrum quadrati, quæ aſymmetræ ſunt.

Proportio rationalis eſt duplex, æqualitatis, & inæqualitatis.

Proportio æqualitatis, eſt quãdo æquale ad æquale comparatur, ut 4. ad 4.

Proportio inæqualitatis, eſt qua inæqualia inter ſe conferuntur, ut 8. ad 4.

Proportio inæqualitatis eſt duplex, maioris inæqualitatis, & minoris.

Proportio maioris inæqualitatis, eſt quando maior quãtitas comparatur ad minorem, ut 4. ad 2.

Huius quinque ſunt ſpecies: Multiplex, ſuperparticularis, ſuperpartiens, Multiplex ſuperparticularis, multiplex ſuperpartiẽs.

Multiplex, eſt quando maior continet minorem plus quàm ſemel, ut 12. ad 3. Hæc creſcit in infinitum. Nam alia eſt dupla, alia tripla, &c.

Superparticularis, eſt quando maior continet minorem, & inſuper aliquam

eius partem. Et hæc decreſcāt in infinitum. Sunt eius ſpecies, ſeſquialtera, quando maior continet minorem, & minoris dimidiū. Quòd ſi ultra ſummam minoris, maior continet eius tertiam partem, uocatur ſeſquitertia.

Superpartiens, eſt quando maior continet minorem, & aliquot eius partes. Quòd ſi continet duas tertias, uocatur ſuperbipartiens tertias, ut 5, 3. Si tres quartas, ſupertripartiens quartas, ut 7, 4.

Multiplex ſuperparticularis, eſt, quando maior continet minorem, plus quam ſemel, & inſuper aliquam eius partem. Quòd ſi continet eum bis, & eius dimidium, dupla ſeſquialtera uocatur, ut 5.2. Si ter & tertiam partem, tripla ſeſquitertia, ut 10.3.

Multiplex ſuperpartiens, eſt quandò maior continet minorem plus quàm ſemel, & aliquot prætereà partes. Quòd ſi continet eum bis, & duas tertias, uocatur dupla ſuperbipartiens tertias, ut 8, 3. Si ter, & tres quartas, tripla ſupertripartiens quartas, ut 15, 4.

Proportio minoris inæqualitatis, eſt quando minor quantitas comparatur ad maiorem.

maiorem, ut 2. ad 4. Et eius tot ſunt ſpecies, quot maioris inæqualitatis, neque differunt ab illis nomine, niſi quòd uocabulis proportionũ maioris inæqualitatis additur præpoſitio ſub, ut ſubmultiplex 2.4. Subſuperparticularis, 2, 3, &c.

Denominatio proportionis minoris quantitatis, ad maiorem, eſt pars uel partes, ut denominatio proportionis inter 3.
& 5. eſt 3: & inter 2.4. $\frac{1}{2}$. 5.

Denominatio proportionis, quantitatis maioris ad minorem eſt totum, uel totum & pars, uel totum & partes, ut denominatio proportionis, 4. ad 3. eſt. 1. $\frac{1}{3}$.

Termini proportionis, ſunt minimi numeri in aliqua proportione, ut proportionis ſeſquialteræ termini ſunt. 3. 2. quibus minores in hac proportione reperiri non poſſunt.

PROPOSITIO PRIMA.

Numeros datæ proportionis ad terminos eius reducere.

Diuidatur maior numerus per minorem, & minor per reſiduum diuiſionis prioris, & reſiduū primæ diuiſionis, per reſiduum ſecūdæ diuiſionis, fiatq; talis reciproca diuiſio, donec occurrat aliquis numerus qui diuidendum totum conſumat. Deinde per hunc numerum ultimò occurrentem, diuide utroſque numeros proportionis datæ, qui exeunt, ſunt minimi numeri, hoc eſt, termini eius proportionis. Vt numeri proportionis quæ eſt inter 30. & 18. ſic rediguntur ad terminos proportionis. Trigınta diuidantur per 18. & relinquentur 12. per quæ diuidantur 18. & relinquentur 6. per quæ rurſus diuidantur 12. & conſumentur. Per hunc ergo ſenarium diuidantur numeri dicti, ſcilicet 30. & 18. exibuntq; 5 3. termini ſcilicet proportionis datorum numerorum.

Hic animaduertendum, quòd ſi in tali reciproca diuiſione ad unitatem perueniretur, ipſos datos numeros eſſe terminos, neque poſſe minores reperiri.

SECVNDA PROPOSITIO.

Cuiuſcunque proportionis datæ, denominationem inuenire.

Si pro-

Si proportio data fuerit maioris inæqualitatis, diuide maiorem numerum per minorem, & numerus qui exit, denominatio eſt proportionis datæ. Si uerò proportio data fuerit minoris inæqualitatis, ſuperpone minorem maiori, interiecta uirgula, more minutiarum uulgarium, & habebis denominationem, reducendi tamen ſunt numeri ad terminos per præcedentem, ſicubi opus fuerit.

TERTIA PROPOSITIO.

Si unus numerus duos multiplicet, erit multiplicatorum & productorum una proportio.

Vt 3. & 2. multiplicentur ſenario, & prouenient 18. & 12. eandem cuſtodientes proportionem quam 3. & 2. Similiter ediuerſo: Si unus numerus, duos diuidendo, utrunque conſumat, erit diuiſorum & quotientum una proportio, ut 6 conſumit 18. & 12. exeunt quotientes 3. & 2. in eadem proportione.

QVARTA PROPOSITIO.

Proportionem proportioni addere.

Multiplicentur antecedentes proportionum datarum in ſe, & deinde conſequentes in ſe, producti numeri cuſtodient proportionem compoſitam ex duabus datis, ut proportio 3. ad 2. ſit addenda proportioni 4. ad 3. Multiplico primo 3. & 4. antecedentes in ſe, & proueniunt 12. deinde 2. & 3. id eſt, conſequentes in ſe, & proueniunt 6. Inter 12. igitur & 6. eſt proportio compoſita ex duabus datis proportionibus, ſcilicet 3 ad 2. & 4. ad 3. Nam multiplicatur antecedens unius proportionis in conſequentem alterius, ut 3, in 3. proueniunt 9. qui ſtatuantur inter 12. & 6. hoc modo 12 9 6.

In his itaque tribus numeris, uides dictas duas proportiones. Nam 12. ad 9. eſt proportio, ſicut 4. ad 3. & 9. ad 6. ſicut 3. ad 2. quod patet reducendo eos ad terminos per primam huius.

V. PROPOSITIO.

Proportionem à proportione ſubtrahere.

Antecedens maioris proportionis multiplicatur in conſequentem minoris, deinde conſequens maioris in antecedentem minoris,

noris, duo numeri producti cuſtodiēt proportionem reſiduam, ut 4. ad 3. proportio ſit ſubtrahenda à proportione 3. ad 2. facio ergo ut dictū eſt, & relinquitur proportio 9. ad 8. Nam multiplicatur antecedens maioris, in antecedentem minoris, & productum ſtatuas ante dictos numeros hoc modo. 12. 9. 8. Nónne 12. ad 8. proportio eſt ſicut 3. ad 2. à qua ſi abieceris proportionem 12. ad 9. id eſt 4. ad 3. relinquitur proportio 9. ad 8.

VI. PROPOSITIO.

Quotlibet proportiones eiuſdem denominationis continuare.

Quærantur per primam datæ proportionis termini. Et pro duabus continuandis, ducatur antecedens datæ proportionis primo in ſe, deinde in conſequentem, poſtremo cōſequens in ſe tres numeri producti duas cuſtodiūt proportiones ſimiles datæ. Verbi gratia. Sint duæ ſeſquialteræ continuādæ. Proportionis ſeſquialteræ termini ſunt 3, & 2. Multiplico igitur 3. in ſe, deinde in 2. Poſtremò 2. in ſe, & naſcuntur numeri 9. 6. 4. cuſtodiētes duas ſeſquialteras. Si tres ſeſquialteræ fuerint conti-

tinuandæ,

nuandæ ducatur maior terminorum in tres modò inuentos, & minor terminus in ultimum, & exorietur 4 numeri tres ſeſquialteras ſeruantes, ut 3. multiplicati in 9.6. 4. generant 27.18.12. & binarius in 4. ductus procreat 8. ſicq; ſunt producti quatuor numeri 27.18.12.8. cuſtodientes tres ſeſquialteras. Si quatuor ſeſquialteras continuare placuerit, ducatur maior terminus in quatuor iam nunc inuentos, & minor terminus in poſtremum, & habebis quinq; numeros, quatuor ſeſquialteras continuatas retinentes, ut 81.54.36.24.16.

CAPVT QVARTVM,

De proportionalitate.

Proportionalitas, eſt proportionum ſimilitudo.

Quantitates dicuntur proportionales, quarum una eſt proportio.

Proportionalitas eſt duplex, Continua & Diſcontinua.

Continua, eſt quando omnes quantitates ſunt antecedentes & conſequentes, preter primam, quæ eſt antecedens tantùm: & ultimam, quæ eſt conſequens tantùm. Et hæc reperitur ad minimum in tribus terminis, ut 4.2.1.

Diſcontinua,

Diſcontinua, eſt quando nulla quantitas ſimul, & antecedens eſt, & conſequens, ut. 12.6.8.4. Et hæc ad minimum in quatuor reperitur terminis.

Sex ſunt ſpecies proportionalitatis: Conuerſa, Permutata, Coniuncta, Diſiuncta, Euerſa, & Aequa.

Conuerſa eſt, quando eſt prima ad ſecundam, ſicut tertia ad quartam, & ex hoc infertur ſecunda eſſe ad primam ſicut quarta ad tertiam, ut ſi eſt 8. ad 4, ſicut 6. ad 3. erit econuerſo 4. ad 8. ſicut 3. ad 6.

Permutata eſt, quando prima eſt ad ſecundam, ſicut tertia ad quartam: & ex hoc concluditur prima eſſe ad tertiam ſicut ſecunda ad quartam: ut ſi eſt 8. ad 4. ſicut 6. ad 3. erit permutatim 8. ad 6. ſicut 4. ad 3.

Coniuncta eſt, quando eſt prima ad ſecundam, ſicut tertia ad quartam: & ex hoc infertur prima cum ſecunda eſſe ad ſecundam, ſicut tertia cum quarta ad quartã: ut ſi eſt 8. ad 4 ſicut 6. ad 3. erit coniunctim 12. ad 4. ſicut 9, ad 3.

Diſiuncta eſt, quando eſt prima ad ſecundam, ſicut tertia ad quartam, & ex hoc infertur, exceſſus primæ, ſuper ſecundam, eſſe ad ſecundam, ſicut

exceſſus

exceſſus tertiæ ſuper quartam ad quartam, ut ſi eſt 18.ad 6.ſicut 9. ad 3.erit diſiunctim 12.ad 6.ſicut 6.ad 3.

Euerſa eſt, quando eſt prima ad ſecundam, ſicut tertia ad quartam, & ex hoc infertur prima eſſe ad exceſſum eius ſuper ſecundam, ſicut tertia ad exceſſum ſuum ſuper quartam, ut ſi eſt 12.ad 4. ſicut 9.ad 3. erit euerſim 12.ad 8.ſicut 9.ad 6.

Aequa proportionalitas, eſt quãdo ſunt duo ordines proportionum, & proportiones huius ordinis ſunt æquales proportionibus illius ordinis, intermiſſiſq; æquali numero intermedijs in utroque ordine, infertur eadem eſſe proportio extremorum, ut ſint duo ordines æqualium proportionum, & intermittãtur utrobiq; duo intermedij, ærnes extremorum eandem eſſe proportionem.

24	48
8	16
6	12
3	6

PRIMA PROPOSITIO.

Si fuerint tres numeri proportionales, quod continetur ſub extremis, æquum eſt quadrato medij.

Sint tres numeri continuati in proportione ſeſquialtera 9.6.4.ducantur extremi

tremi 9. & 4. in ſe, producant 36. quibus æquale eſt quadratum medij ſenarij.

SECVNDA PROPOSITIO.

Quemlibet ex tribus proportionalibus ignotum inuenire.

Si alter extremorum ignotus fuerit, quadretur medius, & productum diuidatur per extremum notum, prodibit extremus ignotus. Si medius ignoretur, ducantur extremi in ſe, & producti, radix quadrata erit medius.

TERTIA PROPOSITIO.

Si fuerint quatuor numeri proportionales quod continetur ſub extremis, æquum eſt ei quod ſub intermedijs continetur.

Sint quatuor numeri proportionales 6. 3. 4. 2. extremi ducti in ſe producunt 12, cui æquale eſt quod conficitur ex medijs 3. & 4. in ſe ductis.

QVARTA PROPOSITIO.

Quemlibet ex quatuor proportionalibus ignotum inuenire.

Si quis

Si quis extremorum ignoretur, ducantur medij in ſe, & productum diuidatur per extremum notum, & prodibit extremus ignotus. Quòd ſi quis intermediorum ignotus fuerit, multiplicantur in ſe extremi, & productus per medium notum diſtribuatur, prodibit medius ignotus.

V. PROPOSITIO.

Quando productum ex duobus numeris eſt æquale producto ex alijs quibuſlibet duobus numeris, tunc ſi hi poſteriores duo prioribus duobus interponantur: aut econtrario, erunt hi quatuor numeri proportionales, ut productũ ex 12. & 3. hoc eſt, 36. æquatur producto ex 9. & 4. Quare ſi 9. & 4. interſerantur 12. & 3. hoc modo 12. 9. 4. 3. erunt proportionales. Aut ſi inter 9. & 4. ponantur 12. & 3. nihilominus erunt proportionales, ut 9. 12. 3. 4.

VI. PROPOSITIO.

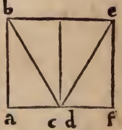
Si totius ad totum eſt proportio quæ detracti ad detractum, erit reſidui etiam ad reſiduum proportio, quæ totius ad totũ.

VI 12.

Vt 12. & 8. habent proportionem ſeſquialteram. Detrahantur itaque ab eis duo numeri, qui eandem habeant proportionem, ex 12. quidem detrahantur 9. & ex 8. auferantur 6. Dico reſiduos ſimili iunctos proportione. Nam ſubtractis 9. de 12 relinquuntur 3. At 6. de 8 abiectis, remanent 2. 3. autem reſpiciũt 2. ſeſquialtera proportione.

CAPVT QVINTVM,
De triangulis.

Si duo trianguli ponantur inter lineas æquidiſtantes, erit ipſorum triangulorum proportio, quæ eſt baſium, quibus inſiſtunt.

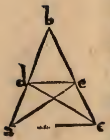


Sint duo trianguli a b c, & d e f, inter lineas æquidiſtantes b e, & a f, dico ipſorum eſſe proportionem, quæ eſt baſium. Nam ſi poſiti fuerint ſuper baſes æquales trianguli, ſunt æquales: ſi uerò ſuper baſes inæquales, & ipſi inæquales per 26. & 27. Quia uerò talium triangulorum æqualitas & inæqualitas, concomitatur æqualitatem & inæqualitatem baſium, neceſſariò erit triangulorũ proportio quæ eſt baſium.

SECVN-

SECVNDA PROPOSITIO.

Si linea recta duo trianguli latera ſecet, tertio æquidiſtans, erunt ſegmenta laterum proportionalia.



Sit triangulus a b c, cuius latera a b, & c b ſecat linea d e æquidiſtanter baſi a c, dico a d ad d b proportionem eſſe, ſicut c e ad e b. Trahantur enim lineæ d c, & e a. Erunt itaque duo trianguli d e a, & d e c æquales. Nam ponuntur ſuper eandem baſim d e, inter lineas d e, & a c æquidiſtantes, quapropter habet ad triangulum d e b, eandem proportionem. Sed proportio trianguli a d e, ad triangulum d e b, eſt per præcedentem ſicut baſis a d, ad baſim d b. Nam trianguli a d e, & d b e ponuntur inter lineas æquidiſtantes, quod pateret ſi duceretur à puncto e æquidiſtans lineæ a b. Similiter per præmiſſam proportio trianguli d e c, ad triangulum d e b, eſt ſicut proportio baſis c e, ad baſim e b. Nam trianguli d e c, & d e b, ponuntur inter lineas æquidiſtantes, quod pateret, ſi duceretur à puncto d linea æquidiſtans lineæ b c. Cùm ergo triangulorũ eſt eadem proportio, ut modò oſtenſum, erit per conceptionem primam, & baſium eadem proportio, quæ ſunt ſegmenta, in quæ latera

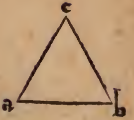
trianguli

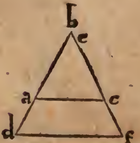
trianguli a b c diſiecta ſunt, ergo patet propoſitum.

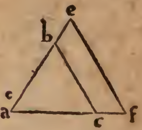
TERTIA PROPOSITIO.

Duorum triangulorum æquiangulorum, latera æquos angulos reſpiaëtia, ſunt proportionalia.

Sint duo trianguli æquianguli a b c, & d e f, ſitq; angulus a æqualis angulo d, & angulus b, angulo e, & angulus c, angulo f: dico latera æquos angulos aſpicientia eſſe proportionalia, hoc eſt, proportionem lateris a b, ad d e: & a c, ad d f: & b c, ad e f, eſſe unam. Nam *ſi trianguli ſunt æquilateri, habebunt latera æquis angulis oppoſita, proportionem æqualitatis.* Si *uerò fuerint laterum inæqualium, ſuperponatur primo angulus b, angulo c.* Et *quia ſunt æquales ex hypotheſi, cadet propter octauam conceptionem latus b a, ſuper latus e d, & latus b c, ſuper latus e f: & quia angulus b a c eſt æqualis angulo e d f, erit linea a c, æquidiſtãs lineæ d f, per ſecundam partem uiceſimæ.* Nam *lineis a c, & d f incidit e d, linea ſcindens angulum extrinſecum e a c, æqualem intrinſeco ſibi ex iſta*



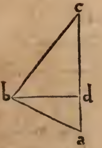




go d a,ad a b,ſicut f c,ad c b,& per proportionalitatem coniunctam d a e, ad a b, ſicut f c e, ad c b. Deinde angulus a congruat angulo d,& ſimili modo probetur f d, eſſe ad c a, ſicut e d,ad b a,& patebit propoſitum.

QVARTA PROPOSITIO.

Si ab angulo recto trianguli orthogonij, cæciderit ad baſim perpendicularis,erunt tres triāguli,ſcilicet totalis,& duo partiales æquianguli. Vnde perpendicularis inter ſegmēta baſis medio loco erit proportionalis. Item utrumq; latus medio loco proportionale erit inter totam baſim, & ſegmentum ſibi conterminale.

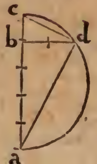


Sit triangulus a b c, cuius angulus b rectus,à quo ad baſim a c,cadat perpendicularis b d. Dico totalem triangulum a b c,& duos partiales a b d,& b d c,inter ſe eſſe æquiangulos. Nam quilibet eorum habet angulum rectum,totalis quidem a b c,partiales uerò angulos, qui ſunt a b d,commu nicat inſuper uterque partialium cum totali in uno angulo:quare tertij erunt etiā æquales propter 24.primi capitis. Memēto igitur angulum b a d, æqualē eſſe angulo d b c, & angulum a b d, æqualem angulo b c d,

c d. Correlarij utraque pars facilè probatur, ſi diligenter aduerteris, quæ latera æqualibus opponantur angulis. Cùm enim duo partiales trianguli ſint æquianguli, erunt per præcedētem latera æquos angulos reſpicientia proportionalia. Latus *itaque a d, ſiniſtri trianguli ad latus d b, trianguli dextri, eſt ſicut idē latus d b trianguli ſiniſtri, ad latus d c trianguli dextri.* Hic *aduerte b d, lineam bis ſumi, primò ut latus dextri trianguli: deinde ut latus ſiniſtri trianguli, & ut uariè ſumitur, ita uarios aſpicit angulos.* Rurſus *latus a c, totalis trianguli ad latus a b, ſiniſtri, ſicut latus a b, totalis trianguli, ad latus a d, ſiniſtri.* Viden *latus b a, medio loco eſſe proportionale inter totam baſim a c, & partem ſibi conterminalem a d.* Similiter *latus a c, totalis trianguli, ad latus b c, dextri, ſicut latus b c, totalis ad latus d c, dextri.*

V. PROPOSITIO.

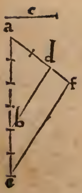
Duabus lineis propoſitis, tertiam inter eas in proportionalitate continua collocare.



Sint duæ lineæ a b, & b c: inter quas linea medio loco proportionalis inuenitur, hoc modo: Datæ *lineæ continuentur in directum, & ſint a b c: deinde ſuper eas conti-*

puncto b, educatur perpendicularis d b, uſque ad circumferentiam ſemicirculi. Hanc dico eſſe medio loco proportionalem inter lineas a b, & b c, datas. Nam protrahantur lineæ d a, & d c. Erit itaque per primam ſecundi capitis, angulus a d c rectus, à quo ad baſim a c cadit p̄ hypotheſim perpendicularis b d, per præcedētem ergo ipſa b d, eſt medio loco proportionalis inter ſegmenta baſis a b, & b c, hoc eſt, inter lineas datas.

VI. PROPOSITIO.



Duabus lineis datis, tertiam eis in continua proportionalitate ſubiungere.

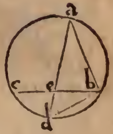
Sint duæ lineæ datæ a b, & c, propoſitum eſt eis ſubiungere tertiam, ad quā ſe habeat ſecunda, ſicut prima ſe habet ad ſecundam. Coniunge ergo angulariter lineæ a b, lineam a d, æqualem c datæ, & cōnectatur b d. Deinde lineam a b, protrahe uſque ad e, ita ut b e, ſit æqualis c, datæ. & ex puncto e, educ æquidiſtantem ipſi b d, quam produc, donec cōcurrat cum a d, protracta in puncto f. Dico d f, eſſe eam quæ quæritur. Nam in triangulo a e f, linea b d, ſecat duo eius latera, a f, & a e, æquidi-

ſtans

ſtans tertio, ergo per ſecundã, huius ſegmẽta erunt proportionalia, hoc eſt, a b, ad b e; quare etiã ad c: ſunt enim poſitæ æquales, ſicut a d, & ob id c, ad d f.

VII. PROPOSITIO.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe ad inuicem ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſectionibus unius, æquale eſt ei quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

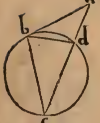


In circulo a d b c, ſecent ſe duæ rectæ utcunque cõtigerit, a b, & c d, in puncto e. Dico rectangulum quod continetur ſub lineis a e, & e b, æquale eſſe ei, quod continetur ſub d e, & e c. Trahantur a d, & c b, rectæ. Et quia trianguli a e d, & e c b, ſunt æquianguli: nam angulus a e d, æquatur ſibi contrapoſito b e c, per undecimam primi capitis, & angulus d a e, æqualis eſt angulo b c e, per nonam ſecundi capitis: ſuſcipiuntur enim ab eodem arcu, ſcilicet d a c b, tertius itaque angulus, tertio æqualis eſt propter 24. primi capitis. Latera itaque æquos angulos reſpicientia ſunt proportionalia per tertiam huius. Ergo a e, ad e c, ſicut e d, ad e b, ergo per

tertiam quarti capitis, quod fit ex a e, in c b, æquale eſt ei, quod fit ex e c, in e d, quod eſt propoſitum.

VIII. PROPOSITIO.

Si circulum linea contingat, & à termino cõtingentis trahatur linea circulum diſpeſcens, quod continetur ſub tota diſpeſcẽte, & parte eius exteriori, æquum eſt quadrato lineæ contingentis.



Sit circulus b d c, quem linea a b, contingat in puncto b, & a termino a lineæ contingentis utcunque libuerit, trahatur linea circulum in duas portiones diſpeſcens, ſitque a d c. Dico *rectangulum, quod ſub tota a d c, continetur, & proportione exteriori a d, æquũ eſſe quadrato lineæ cõtingentis a b. Trahantur à pũcto contactus b, ad pũcta quibus linea a c, d, circulum ſecat, lineæ b d, & b c.* Habes *duos triangulos æquiangulos, totalem ſ. a b c, & partialem a b d.* Nam *angulus b c a, totalis triãguli, æqualis eſt per undecimã ſecundi capitis angulo a b d, partialis trianguli.* Et *angulus b a d, utrique eſt cõmunis, tertius igitur tertio æqualis eſt.* Et *quia trianguli a b c, & a b d, ſunt æquianguli, erunt per tertiã huius,*

huius, latera æquos angulos reſpicientia proportionalia. Latus igitur totalis trianguli c d a, ad b a, latus partialis trianguli, ſicut latus b a, totalis trianguli, ad latus d a, partialis trianguli. Tres ergo lineæ c a, a b, d a, ſunt continuè proportionales, per primam ergo quarti capitis quod fit ex prima c a, in tertiam d a, æquum eſt quadrato mediæ a b, quod erat demonſtrandum.

FINIS.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE